Μαθημα 2º 9/3/2018

Ολοκληρωτικες εξ.

Εαν $w=f(x,y,z)$ και f εχει συνεχεις μερικες παραγωγους επιπλεον $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ και x,y,z ειναι παραγωγισιμες ως προς t

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\int_c^y\int_\alpha^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,s)\,ds\,dz=\int_\alpha^b\int_c^y \frac{\partial f}{\partial z}(z,s)\,dz\,ds$$

Παραγωγιζοντας ως προς y

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_c^y\int_\alpha^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,s)\,ds\,dz=\frac{\partial}{\partial y}\int_\alpha^b\int_c^y \frac{\partial f}{\partial z}(z,s)\,dz\,ds$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_\alpha^b \frac{\partial f}{\partial y}(z,s)\,ds}=\frac{\partial}{\partial y}\int_\alpha^b (f(y,s)-f(c,s))\,ds$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\int_\alpha^b f(y,s)\,ds$$

Δ Π.Α.Τ → Ο.Ε. Volterra

Θεωρουμε το ΠΑΤ

$$y''(t)+A(t)\,y'(t)+B(t)\,y(t)=g(t)\quad,\ t\in[a,b]$$

$$y(a)=c_0\quad,\quad y'(a)=c_1$$

A,B,g συνεχεις στο $[a,b]$ και επιπλεον η A να εχει συνεχη παραγωγο στο $[a,b]$

Ξεκινάμε ολοκληρώνοντας από το a έως το t

Παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ συνεχής

$$\int_a^t y''(s)\,ds + \int_a^t A(s)\,y'(s)\,ds + \int_a^t B(s)\,y(s)\,ds = \int_a^t g(s)\,ds$$

$$\Rightarrow y'(t) - \underbrace{y'(a)}_{= c_1} + \underbrace{\int_a^t A(s)\,y'(s)\,ds}_{} + \int_a^t B(s)\,y(s)\,ds = \int_a^t g(s)\,ds$$

με παραγοντική ολοκλήρωση έχω

$$y'(t) - c_1 + \left[A(s)\,y(s)\right]_a^t - \int_a^t A'(s)\,y(s)\,ds + \int_a^t B(s)\,y(s)\,ds = \int_a^t g(s)\,ds$$

ή

$$y'(t) - c_1 + A(t)\,y(t) - A(a)\,\overset{= c_0}{y(a)} - \int_a^t A'(s)\,y(s)\,ds + \int_a^t B(s)\,y(s)\,ds = \int_a^t g(s)\,ds$$

Ολοκληρώνοντας ξανά από το a έως το t:

$$y(t) - y(a) - \int_a^t c_1\,ds + \int_a^t A(s)\,y(s)\,ds - A(a)\,c_0\,(t-a) - \int_a^t\int_a^s A'(z)\,y(s)\,dz\,ds +$$

$$\int_a^t\int_a^s B(z)\,y(z)\,dz\,ds = \int_a^b\int_a^s g(z)\,dz\,ds$$

Στόχος

Να περάσω από το διπλό ολοκλήρωμα σε μεμονωμένο εφαρμόζοντας τη S.O.S ιδιότητα ... καταλήγω

Οπότε

$$y(t) = c_0 + \left[c_1 + c_0\,A(a)\right](t-a) - \int_a^t \left[A(s) + (t-s)\cdot\left(B(s) - A'(s)\right)\right] y(s)\,ds +$$

$$+ \int_a^b (t-s)\,g(s)\,ds$$

Αν $f(t) = c_0 + [c_1 + c_0 A(a)](t-a) + \int_a^t (t-s) g(s) ds$

και $K(t,s) = -[A(s) + (t-s)(B(s) - A'(s))]$

Τοτε θα εχουμε:

$$y(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s) y(s) ds$$ Ο.Ε Volterra $2^{ου}$ ειδους

B' τροπος

Θετουμε $y''(t) = \phi(t)$ τοτε με ολοκληρωση απο το a εως

το t εχω

$$\underbrace{y'(t) - y'(a)}_{c_1} = \int_a^t \phi(s) ds \Rightarrow y'(t) = c_1 + \int_a^t \phi(s) ds$$

Ξανα ολοκληρωνουμε απο a εως t

$$y(t) - y(a) = c_1(t-a) + \int_a^t \int_a^s \phi(w) dw ds$$

οποτε

$$y(t) = \int_a^t (t-s)\phi(s) + c_1(t-a) + c_0$$

με αντικατασταση στην αρχικη των $y''(t), y'(t)$ και $y(t)$

καταληγω σε Ο.Ε της μορφης

$$\phi(t) = f_1(t) + \int_a^t K(t,s) \phi(s) ds$$

Βρισκουμε τη ϕ και στη συνεχεια την y

Scanned by CamScanner

Παράδειγμα

Να αναχθεί το ΠΑΤ σε μια Ο.Ε Volterra

$y''(t) + y(t) = -\cos t \quad , 0 \le t \le 1$

$y(0) \quad , \quad y'(0) = 1$

Λύση

Ολοκληρώνω από 0 έως t

$$\int_0^t y''(s)\,ds + \int_0^t y(s)\,ds = -\int_0^t \cos s \,ds$$

$$y'(t) - y'(0) + \int_0^t y(s)\,ds = -[\sin t - \sin 0]$$

$$y'(t) - 1 + \int_0^t y(s)\,ds = -\sin t$$

Ξανά ολοκληρώνω από 0 έως t

$$\int_0^t y'(s)\,ds - \int_0^t 1\,ds + \int_0^t \int_0^s y(z)\,dz\,ds = -\int_0^t \sin s\,ds$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow y(t) - y(0) = \cos t - t - 1 - \int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds \quad \text{Ο.Ε Volterra}$$

$$K(t,s) = -(t-s)$$

Π.Σ.Τ → Fredholm

Θεωρούμε το εξής Π.Σ.Τ

$y''(t) + A(t)\,y'(t) + B(t)\,y(t) = g(t)$ (1) $\quad , \quad a < t < b$

$y(a) = C_0 \quad , \quad y(b) = B_0$ με A, B, g συνεχείς στο $[a,b]$

και $A'(t)$ συνεχής στο $[a,b]$

Ολοκληρώνω την (1) από a έως t

$$\int_a^t y''(s)\,ds + \int_a^t A(s)\,y'(s)\,ds + \int_a^t B(s)\,y(s)\,ds = \int_a^t g(s)\,ds$$

$$y'(t) - y'(a) + A(t)y(t) - y(a)A(a) - \int_a^t A'(s)y(s)\,ds + \int_a^t B(s)y(s)\,ds = \int_a^t g(s)\,ds \quad (*)$$

Ολοκληρώνω πάλι από α έως t

$$y(t) - y(a) - y'(a)(t-a) - A(a)(t-a)C_0 + \int_a^t A(s)y(s) - \int_a^t (t-s)(A'(s)-B(s))y(s)\,ds = \int_a^t (t-s)g(s)\,ds$$

με αντικατάσταση

$$y(t) - C_0 - [-y'(a) + A(a)C_0](t-a) + \int_a^t A(s)y(s)\,ds - \int_a^t (t-s)[A'(s)-B(s)]y(s)\,ds = \int_a^t (t-s)g(s)\,ds \quad (**)$$

Θέτουμε στην (**) t=b οπότε λύνοντας ως προς $y'(a)$:

$$y'(a) = \frac{1}{b-a}\Big[-B_0 + C_0 + A(a)C_0(b-a) - \int_a^b (A(s)-(b-s)(A'(s)-B(s)))y(s)\,ds + \int_a^b (b-s)g(s)\,ds\Big]$$

Με αντικατάσταση της $y'(a)$ στη σχέση (**) έχουμε

$$y(t) = C_0 + \int_a^t (t-s)g(s)\,ds + \frac{t-a}{b-a}\int_a^b (b-s)g(s)\,ds + \frac{t-a}{b-a}\int_a^b [A(s)-(b-s)(A'(s)-B(s))]y(s)\,ds - \int_a^t (A(s)-(t-s)[A'(s)-B(s)])y(s)\,ds - \frac{t-a}{b-a}(B_0 - C_0)$$

Σπάμε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b (\dots) y(s) ds = \int_a^t (\dots) y(s) ds + \int_t^b (\dots) y(s) ds$$

και θέτουμε

$$K(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-a)}{b-a}\left[A(s) - (b-s)(A'(s) - B(s))\right] - \\ -\left[A(s) - (t-s)[A'(s) - B(s)]\right], & s \le t \\ \frac{(t-a)}{b-a}\left[A(s) - (b-s)A'(s) - B(s)\right], & t \le s \end{cases}$$

και $f(t) = C_0 + \int_a^t (t-s) g(s) ds + \frac{t-a}{b-a}\left[B_0 - C_0 + \int_a^b (b-s) g(s) ds\right]$

Έχουμε

$$y(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s) y(s) ds + \int_a^b K(t,s) y(s) ds = f(t) + \int_a^b K(t,s) y(s) ds$$

σταθερά άκρα ολοκλήρωσης $\Rightarrow$ Ο.Ε fredholm

Δ Όταν για την συνάρτηση $K: [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει $K(t,s) = K(s,t)$ $\forall$ $t,s \in [a,b]$ $\Rightarrow$ λέμε ότι έχουμε συμμετρικό πυρήνα

Παράδειγμα

Να αναχθεί το ΠΣΤ $y''(t) + \lambda y(t) = t$, $0 < t < \pi/2$

$y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$ σε fredholm

απάντηση

Θέλω άκρα ολοκλήρωσης σταθερά

ολοκληρώνω την εξίσωση από το κάτω άκρο έως t

Εχουμε

$$\int_0^t y''(s)\,ds + \lambda \int_0^t y(s)\,ds = \int_0^t s\,ds \Rightarrow$$

$$y'(t) - y'(0) + \lambda \int_0^t y(s)\,ds = \frac{t^2}{2}$$

Ξανα ολοκληρωνω

$$y(t) - y(0) - y'(0)t + \lambda \int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds = \int_0^t \frac{s^2}{2}\,ds \Rightarrow$$

$$y(t) - y'(0)t + \lambda \int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds = \frac{t^3}{3} \qquad (**)$$

Απο την σχεση $(**)$ για $t=\pi/2$:

$$y(\pi/2) - y'(0)\frac{\pi}{2} + \lambda \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - s\right) y(s)\,ds = \frac{(\pi/2)^3}{6}$$

Λυνω ως προς y'

$$y'(0) = \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - s\right) y(s)\,ds - \frac{\pi^2}{24}$$

οποτε με αντικατασταση στην $(**)$ εχουμε

$$y(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{\pi^2}{24}t + \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\pi}{2} - s\right) y(s)\,ds - \lambda \int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds \Leftrightarrow$$

Θελω να βρω την $k(t,s)$. Σπαω το ολοκληρωμα

$$\Leftrightarrow \frac{t^3}{6} - \frac{\pi^2}{24}t + \underbrace{\frac{2\lambda}{\pi} \int_0^t t\left(\frac{\pi}{2} - s\right) y(s)\,ds}_{} + \frac{2\lambda}{\pi} \int_t^{\pi/2} t\left(\frac{\pi}{2} - s\right) y(s)\,ds -$$

$$- \underbrace{\lambda \int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds}_{} \quad /\text{μαζι}$$

Οπότε

$$y(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{\pi^2}{24}t + \lambda\int_0^t \left[\frac{2t}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - s\right) - (t-s)\right] y(s) +$$

$$+ \lambda\int_t^{\pi/2} \frac{2t}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - s\right) y(s)\, ds$$

$$K(t,s) = \begin{cases} \lambda\left(\frac{2t}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - s\right) - (t-s)\right), & s \le t \\ \lambda\frac{2t}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - s\right), & t \le s \end{cases}$$

με πράξεις

$$K(s,t) = \begin{cases} \lambda\left[s\left(1 - \frac{2t}{\pi}\right)\right], & t \le s \\ \lambda\left[t\left(1 - \frac{2s}{\pi}\right)\right], & s \le t \end{cases}$$

οπότε έχω συμμετρικό πυρήνα

* Άσκηση για το σπίτι *

1) Νδο η συνάρτηση $y(t) = \frac{1}{b}\int_0^t \sin(b(t-s))\, f(s)\, ds$ είναι λύση

του ΠΑΤ : $y''(t) + b^2 y(t) = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$, b: σταθερά

2) Θεωρούμε το ακόλουθο ΠΣΤ

$y''(x) + y(x) = x$, $0 < x < \pi/2$

$y(0) = 1$, $y(\pi/2) = \pi$

Να μετατραπεί σε Ο.Ε fredholm

Δ Μετασχηματισμοί Laplace

Ο τελεστής Laplace είναι ένας τελεστής ο οποίος μετασχηματίζει μια συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής t (ορισμένη στο $[0,+\infty)$) σε μια άλλη συνάρτηση τους σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$ υπό την προϋπόθεση

ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται, συγκλίνει

Υπενθύμιση

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει

$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ εάν το $\lim_{a\to\infty}\int_0^{a} g(t)\,dt$ υπάρχει

και είναι ένας πραγματικός αριθμός. Η τιμή του ολοκληρώματος ορίζεται να είναι ίση με την τιμή του παραπάνω ορίου

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f: I\to\mathbb{R}$ (I: διάστημα του $\mathbb{R}$) θα λέγεται τοπικά ολοκληρώσιμη στο διάστημα I, αν αυτή είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του I

(με πεπερασμένα άκρα)

Π.χ

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} 1/\sqrt{x}, & 0<x\le 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

f μη ολοκληρωσιμη στο [0,1] διοτι δεν ειναι φραγμενη στο διαστημα αυτο

Αν f φραγμενη $\Rightarrow$ f ολοκλ.
Αν f μη φραγμενη $\Rightarrow$ f οχι ολοκλ.

ομως η f ολοκληρωσιμη σε καθε διαστημα της μορφης $[a,1]$ με $a>0$ $(0<a<1)$

Ορισμος
Εστω $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ τοπικα ολοκληρωσιμη τοτε οριζουμε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\kappa\to a^+}\int_a^{\kappa} f(x)\,dx$ αν το οριο υπαρχει και ειναι πραγματικος αριθμος. Σ' αυτη την περιπτωση λεμε οτι το γενικευμενο ολοκληρωμα συγκλινει. Αν το οριο ειναι $+\infty$ λεμε οτι το γενικευμενο ολοκληρωμα απειριζεται θετικα (Εαν $-\infty$ λεμε οτι απειριζεται αρνητικα). Εαν το οριο $\nexists$ τοτε λεμε οτι το γενικευμενο ολοκληρωμα δεν συγκλινει /δεν υπαρχει /αποκλινει.

Παραδείγματα

① $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ νδο συγκλίνει

$\rightarrow \int_0^{k} e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^k = -e^{-k}+1$

$\lim_{k\to\infty}(-e^{-k}+1) = 1$ $\exists$ $(\in\mathbb{R})$ $\rightarrow$ συγκλίνει

$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx < \infty$

② $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ απειρίζεται θετικά

$\rightarrow \int_1^{k} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^k = \ln k$

$\lim_{k\to\infty} \ln k = +\infty$ απειρίζεται θετικά

③ Νδο $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ $\nexists$

$\rightarrow \int_0^{k} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^k = 1-\cos k$

$\lim_{k\to\infty}(1-\cos k) = \nexists$ διότι $\nexists \lim_{k\to\infty}\cos k$

$x_\nu = 2\pi\nu \to \infty$ $\cos(x_\nu) \to 1$ $\neq$ $\nexists \lim_{k\to\infty}\cos k$

$y_\nu = 2\pi\nu + \frac{\pi}{2} \to \infty$ $\cos(y_\nu) \to 0$

Scanned by CamScanner

▷ Οριακό κριτήριο σύγκλισης

Θεώρημα

Έστω $f,g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμες με $f(x)>0$, $g(x)>0$ $\forall x \in [a,+\infty)$ με $a_1 > a$

Αν $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ ισχύουν τα ακόλουθα

1. Αν $0<l<\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει αν-ν $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει και $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$

2. Αν $l=0$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < \infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx < \infty$

3. Αν $l=+\infty$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

Υπενθυμίσεις

▷ $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} < \infty$ εάν $p>1$, $a>0$

▷ $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} = +\infty$ εάν $p\leq 1$, $a>0$